УДК 517.3:622

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АППАРАТА ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ГОРНО-ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Налобина С.С., Яковлева Э.К.
научный руководитель канд. пед. наук Бутакова С.М.
Сибирский федеральный университет

Интеграл функции – аналог суммы последовательности. Процесс нахождения интеграла называется интегрированием. Согласно основной теореме анализа, интегрирование является операцией, обратной дифференцированию, чем помогает решать дифференциальные уравнения. Существует несколько различных определений операции интегрирования, отличающиеся в технических деталях. Однако все они совместимы, то есть любые два способа интегрирования, если их можно применить к данной функции, дадут один и тот же результат. Наиболее простым является интеграл Римана. Интегрирование прослеживается ещё в древнем Египте, примерно в 1800 г. до н. э., Московский математический папирус демонстрирует знание формулы объёма усечённой пирамиды. Первым владельцем этого папируса был один из основателей русской египтологии Владимир Семёнович Голенищев. Ныне «папирус Голенищева» находится в Музее изобразительных искусств им. А. С. Пушкина в Москве.

Первым известным методом для расчёта интегралов является метод исчерпывания Евдокса (примерно 370 до н. э.), ученый пытался найти площади и объёмы тел, разбивая их на бесконечное множество частей с известными мерами. Это своего рода античный анализ криволинейных фигур. Следующий крупный шаг в исчисление интегралов был сделан в Ираке, в XI веке, математиком Ибн ал-Хайсамом, в своей работе «Об измерении параболического тела» он приходит к уравнению четвёртой степени. Решая эту проблему, он проводит вычисления, равносильные вычислению определённого интеграла, чтобы найти объём параболоида. В трактате «Об измерении параболического тела» Ибн ал-Хайсам приводит формулы для суммы последовательных квадратов, кубов и четвёртых степеней, и ряд других формул для сумм рядов. С помощью этих формул он проводит вычисление, равносильное вычислению определённого интеграла $\int_0^a \sqrt{x}dx$. И. Ньютон разработал дифференциальное и интегральное исчисление почти одновременно с Г. Лейбницем, но немного раньше и независимо от него. Г. Лейбниц, опережая И. Ньютона, указал, что операция интегрирования обратная к дифференцированию.

До И. Ньютона действия с бесконечно малыми не были увязаны в единую теорию и носили характер разрозненных остроумных приёмов, однако благодаря ученому появился комплекс понятий, операций и символов, ставший отправной базой дальнейшего развития математики. Следующий, XVIII век, стал веком бурного и чрезвычайно успешного развития аналитических методов.

Современное обозначение неопределённого интеграла было введено Г. Лейбницем в 1675 году. Он образовал интегральный символ из буквы «длинная *s*» – сокращение латинского слова «*summa*».

Нашей целью было расширить и систематизировать базовые знания по теме «Интегральное исчисление функции одной и нескольких переменных», которая входит в раздел математического анализа и познакомится с направлениями применения математического аппарата в прикладных задачах, более подробно рассмотреть приложения интегрального исчисления к задачам горно-геологического профиля.

В ходе работы рассмотрены основные понятия интегрального исчисления, а также изучены приложения аппарата интегрального исчисления: в механике – нахождение работы переменной силы и пути пройденного телом; в биологии – определение численности популяции микроорганизмов; в экономике – вычисление издержек производства товара.

Академик В.И. Смирнов отмечает, что математика сначала вошла в геологию вероятностной ветвью и применялась при объективной оценке геологических выводов. Позже начали использовать теорию корреляции. Компьютерная математика захватила широкие сферы горного дела и геологии, способствовала разработки математических моделей производственных и природных процессов. Наиболее интересны в рамках нашей темы геометрические и физические приложения интегрального исчисления в горном деле и геологии. С физической точки зрения с помощью определенного линейного интеграла можно вычислить путь, пройденный ленточным конвейером до полной остановки, используя тройной интеграл, вычисляют, например, массу вывалившейся породы в кровле очистного забоя. С точки зрения геометрии с помощью линейного определенного интеграла находят площадь сечения коренного штрека, а с помощью тройного интеграла – объем купола, образовавшегося в поддерживаемом пространстве комплексно-механизированного очистного забоя. Рассмотрим подробнее подход к решению задачи о нахождении объема купола.

Формулировка задачи: В поддерживаемом пространстве комплексно - механизированного очистного забоя шахты образовавшийся купол имеет форму параболоида вращения. Определить объем купола, если высота его равна 0,7 м, радиус основания равен 0,3 м.

Решение: Для решения задачи мы воспользовались известной в интегральном исчислении формулой нахождения объема тела $V=\iiint\limits_W 1dxdydz$ и уравнением параболоида (из курса аналитической геометрии) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=2(z-z_0)$.

Построим тело, описывающее форму купола очистного забоя (рис. 1).

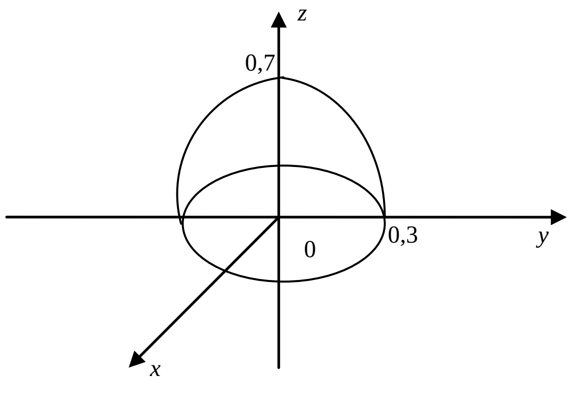

Рис. 1.

Запишем уравнение параболоида, используя данные из условия задачи:

$$\frac{x^2}{0{,}3^2}+\frac{y^2}{0{,}3^2}=2c(z-0{,}07)\,.$$

Далее найдем значение c, полагая, что при $z = 0$ имеем окружность радиуса 0,3 м:

$$\frac{x^2}{0{,}3^2}+\frac{y^2}{0{,}3^2}=2c(0-0{,}7)\Rightarrow x^2+y^2=0{,}09\cdot 2c\cdot(-0{,}7)=0{,}09\Rightarrow -2c\cdot 0{,}7=1\Rightarrow c=-\frac{5}{7}.$$

Подставляя найденное значение c, придем в уравнении параболоида к следующему виду:

$$\frac{x^2}{0{,}3^2}+\frac{y^2}{0{,}3^2}=2\cdot(-\frac{5}{7})\cdot(z-0{,}7)\Rightarrow x^2+y^2=-0{,}09\cdot\frac{10}{7}(z-0{,}7)\Rightarrow x^2+y^2=0{,}09-\frac{9}{70}z.$$

Так как область интегрирования представляет собой параболоид, то удобнее вычислять тройной интеграл, воспользовавшись цилиндрической системой координат. В данной системе координат уравнение параболоида запишется следующим образом:

$$z=(0{,}09-x^2-y^2)\cdot\frac{70}{9},$$

$$z=(0{,}09-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi)\frac{70}{9}=(0{,}09-\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi))\frac{70}{9}=$$

$$=\frac{9}{100}\cdot\frac{70}{9}-\rho^2\frac{70}{9}=\frac{7}{10}-\frac{70}{9}\rho^2.$$

Вычислим объем купола очистного забоя, используя подход к нахождению тройного интеграла в цилиндрической системе координат: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z. \end{cases}$

$$V=\iiint\limits_{W}1dxdydz=\iiint\limits_{W^*}\rho d\varphi d\rho dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{0,3}\rho d\rho\int_0^{\frac{7}{10}-\frac{70}{9}\rho^2}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{0,3}\rho d\rho\left[z\Big|_0^{\frac{7}{10}-\frac{70}{9}\rho^2}\right]=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{0,3}(\frac{7}{10}\rho-\frac{70}{9}\rho^3)d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\frac{7}{10}\int_0^{0,3}\rho d\rho-\frac{70}{9}\int_0^{0,3}\rho^3 d\rho\right]=\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\frac{7}{10}\cdot\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{0,3}-\frac{70}{9}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{0,3}\right]=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{0{,}63}{20}-\frac{0{,}3^4\cdot 70}{36}\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}(0{,}0315-0{,}01575)d\varphi=\int_0^{2\pi}0{,}01575d\varphi=0{,}01575\varphi\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=0{,}01575\cdot 2\pi=0{,}0315\pi\ м^3.$$

Подводя итог, отметим, что, так как мы являемся студентами технической специальности вуза, то для нас наиболее важен прикладной аспект использования математического аппарата, в том числе интегрального исчисления. Рассмотренная выше задача это наглядно проиллюстрировала.